Схема THINC

Для численного решения уравнения переноса была рассмотрена схема THINC. Данный метод описан в статье [1].

В данной работе проводится численное решение уравнения переноса с использованием схемы THINC для одномерного и двумерного случая. Также строится процесс программной реализации и исследование метода THINC для одномерного случая.

Предполагается использовать схему THINC (tangent of hyperbola for interface capturing: гиперболический тангенс для отслеживания поверхности) для численного решения уравнения переноса, представленного в следующем виде:

Где – векторное поле скоростей, - переносимая скалярная величина. Определим как функцию Хевисайда, принимающую значения 0 и 1:

– оператор дивергенции.

В одномерном случае данная задача рассматривается в виде:

Также мы предполагаем, что поле скоростей соленоидально, то есть . В этом случае задача рассматривается в виде:

Отрезок , на котором рассматривается данное уравнение, разбивается на последовательных подотрезков, длиной каждый. . Положения , являются узлами данной сетки. . Для реализации программы была выбрана равномерная сетка с подотрезками равной длины . Зададим длину временного шага и построим схему THINC для вычисления значений функции

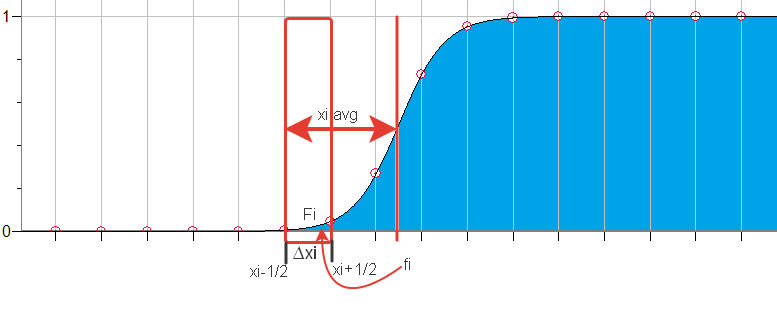
Рассмотрим - среднее значение функции на -ом отрезке на -ом временном шаге:

Для аппроксимации функции на каждом отрезке рассчитывается функция:

Где параметры определяются следующим образом:  
.

определяет сжатие по оси X – скорость прыжка

Параметр – относительное расстояние до середины прыжка от левой границы отрезка .



определяется из интегрального уравнения:

Аналитическое решение данного уравнения:

Численное решение уравнения переноса в одномерном случае

Рассмотрим уравнение переноса в одномерном случае и при постоянной скорости:

После интегрирования данного уравнения по времени на временном шаге :

Представим производную в виде разностной схемы первого порядка:

А интеграл в виде квадратурной формулы прямоугольников:

После подстановки уравнение примет следующий вид:

Таким образом,

Значения известны на каждом временном шаге, а для интерполяции значений используем схему THINC:

Конкретное значение функции зависит от выбора схемы или комбинации схем численного решения.

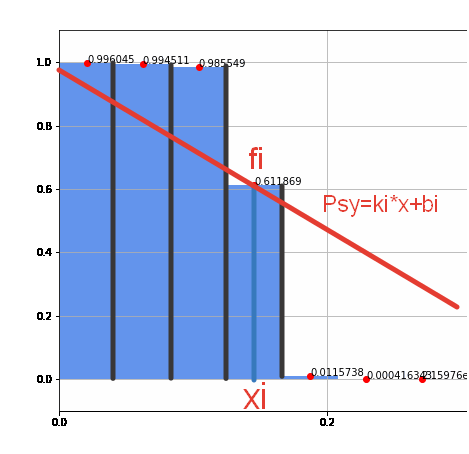
Исследование сходимости

Метод обладает сходимостью степени   
если

Применение различных схем для численного решения уравнения переноса

**Схема Годунова**

**Схема MUSCL**



**Схема THINC + Годунов/MUSCL**

Схема THINC применяется только на тех отрезках, где выполняется условие:

, где - малая величина,

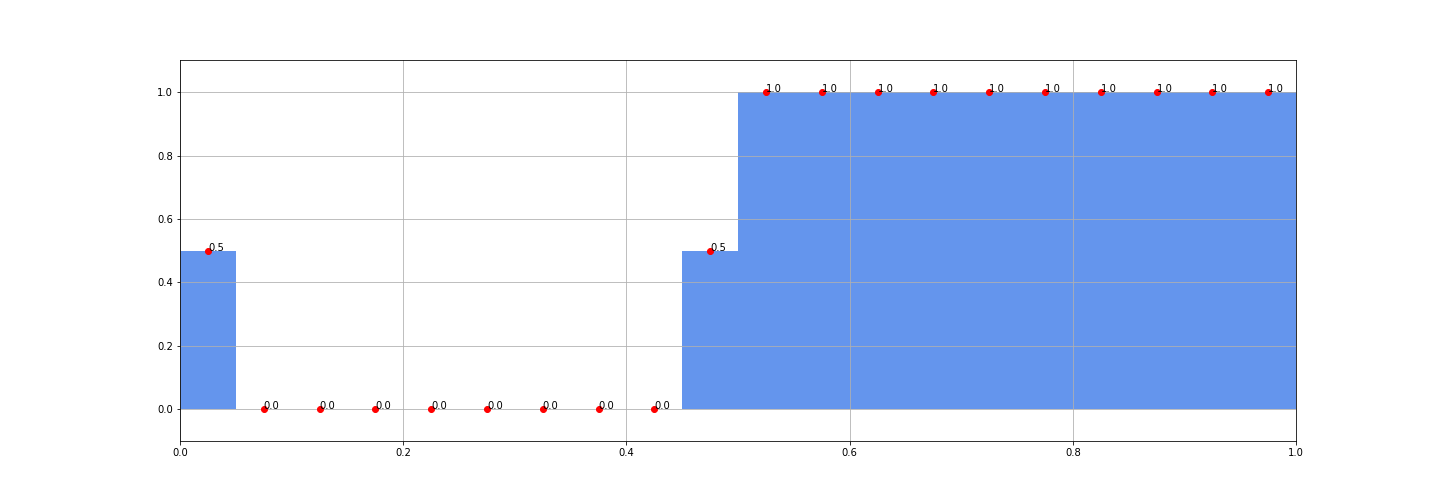
Тогда

Здесь - это функция гиперболического тангенса, аппроксимирующая f(x) на отрезке .

В тех ячейках, где данное условие не выполняется, используется схема Годунова или MUSCL.

Программа расчета уравнения переноса в одномерном случае с использованием схемы THINC

Начальные условия – значения , которые аппроксимирую скалярную величину заданы в массиве .



Исследуемая область построена таким образом, что отрезок - предыдущий для отрезка , наоборот. То есть вся область представляет собой кольцо, и .

На каждом шаге по времени происходит вычисление новых значений . Вычисления проводятся только на тех отрезках, где выполняются неравенства:

, где - малая величина,

По значениям и рассчитываются значения .

По значениям вычисляется значение , необходимое для задания функции .

Теперь готово все необходимое для задания функции на отрезке .

Для каждого следующего отрезка мы сохраняем функцию , и используем ее в качестве .

Значения вычисляются по разностной схеме:

, , где ,

Таким образом, мы делаем шаг по времени для всех отрезков .

Программа на языке программирования C++ численного решения уравнения переноса в одномерном случае находится в Приложении [1].

Визуализация одномерных расчетов схемы THINC

Результаты расчетов были визуализированы с помощью программы на языке Python. Для каждого эксперимента была построена анимация, на которой каждый кадр соответствует шагу по времени.

Программа построения анимации для одномерного расчета уравнения переноса схемой THINC находится в Приложении [2].

Параметры экспериментов:

1. Число разбиений отрезка cellCount.  
   Определяет разрешение сетки и количество вычислений на каждом шаге по времени.
2. Число шагов по времени stepN.
3. Число CFL.  
   Определяет шаг по времени из условия Куранта по формуле:
4. Коэффициент определяет скорость скачка величины f.  
   Для текущих экспериментов было выбрано , как наиболее сбалансированное значение для предотвращения сильного расхождения при движении, и при этом сохранения «переходных» отрезков, чтобы не допустить разрыва в значениях .

В качестве демонстрации были выбраны несколько вариантов начальных условий, различающихся по количеству разбиений на отрезки, количеству шагов по времени и числу CFL.

**Условия 1:**

int cellCount = 20;  
int stepN = 100;  
double CFL = 0.3;

**Условия 2:**

int cellCount = 20;  
int stepN = 100;  
double CFL = 0.1;

**Условия 3:**

int cellCount = 100;  
int stepN = 100;  
double CFL = 0.3;